第五章　遞迴關係

(Recurrence Relations)

利用遞迴關係進行計數的分析在演算法分析中經常用到。

5.1　生成函數法

問題 1.　（兔子問題）

假設我們養了一對異性兔子（永遠活著），而且每個月都會生出一對異性兔子，生出來的小兔子都會在兩個月後長成而且開始生出一對異性小兔，如果我們假設所有的兔子都一直活著，而且只有生出來的一對才會在兩個月後生出另一對，問一年後共有多少對兔子。

首先，令在第 k 個月的第一天時，兔子一共有 F_k 對。即 $F_1=1, F_2=2, F_3=3,$ $F_4=5, F_5=8, F_6=13, F_7=21, \cdots$。從上述的值我們不難看出遞迴關係

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \text{。} \tag{1}$$

這也可以由問題的假設求出來。在下一節我們再來求 F_n，不過如果要用(1)來證明 $F_N = \dfrac{(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1}}{\sqrt{5}}$ 並不難。（直接代入計算）

用遞迴關係看**亂排**（Derangement）

命題 1.

試證 $D_{n+1} = n(D_{n-1} + D_n)$。

證明：

令 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & n+1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$ 為任意的一個亂排，$a_1 = k,$

$k = 2, \cdots, n+1$。現在看 a_k，當 $a_k = 1$ 時，排列的方式共有 D_{n-1} 種。在 $a_k \neq 1$ 時，可以把 k 當成1，排列方式將會有 D_n 種（如圖 4.1），因此我們證明了命題 1。

$$\begin{pmatrix} k & 2 & 3 & \cdots & k-1 & 1 & k+1 & \cdots & n & n+1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & & a_{k-1} & a_k & a_{k+1} & & a_n & a_{n+1} \end{pmatrix}$$

圖 4.1

問題2.

假設 ” ∘” 為集合中的一個二元運算，由於結合律不一定成立，所以

$x_1 \circ x_2 \circ x_3 \circ \cdots \circ x_n,\quad n \ge 3,\quad x_i \in S,\quad i = 1,2,\cdots,n$，並沒有意義；所以

我們需要適當地加入括號。令 μ_n 表示加入括號的方式（不同）之總數。求

μ_n。

我們並不難求出 $\mu_2 = 1,\quad \mu_3 = 2,\quad \mu_4 = 5\quad (a(b(cd), a((bc)d), (ab)(cd),$

$((ab)c)d, (a(bc)d)$。同時也可找到遞迴關係

$$\mu_n = \sum_{m=1}^{n-1} \mu_m \mu_{n-m}\ ,\ \left(n \ge 2\right)$$ 。

(2)

解：

令

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x^n\ ,\ (\mu_n = 1) \\ &= \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \cdots \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \mu_n x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{n-1} \mu_m \mu_{n-m}\right) x^n \\ &= x + \sum_{n=2}^{\infty} (\mu_1 \mu_{n-1} + \mu_2 \mu_{n-2} + \cdots + \mu_{n-1}\mu_1) x^n \\ &= x + [f(x)]^2 \end{aligned}$$

$$[f(x)]^2 - f(x) + x = 0$$

$$\therefore\ f(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$$

$$(1-4x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} (-4x)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\binom{\frac{1}{2}}{n}x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-4)^n\,\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n\,!}x^n$$

$$=1-\sum_{n=0}^{\infty}4^n\cdot\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2})(2-\frac{1}{2})\cdots(n-1-\frac{1}{2})}{n\,!}x^n$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}2^n\cdot\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-5)(2n-3)}{n\,!}x^n$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{(n-1)!}x^n$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot\frac{2^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{(n-1)!(n-1)!}x^n$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}x^n$$

$$=1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\binom{2n-2}{n-1}x^n$$

取 $f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1-4x}}{2}$，則 $f(x)=\dfrac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}x^n$，

所以 $\mu_n=\dfrac{1}{n}\dbinom{2n-2}{n-1}$。

問題２的解顯然是用生成函數的方法求出來的，我們現在介紹另一種方法。

5.2 特徵根的方法（ The Method of Characteristic Roots ）

首先我們來看兩個例子。

例 1. $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$， $n \ge 2$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$。

$$a_k x^k = 2a_{k-1}x^k + 3a_{k-2}x^k,\ k \ge 2$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} a_i x^i = 2\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1}x^i + 3\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2}x^i$$

$$= 2x\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-1}x^{i-1} + 3x^2\sum_{i=2}^{\infty} a_{i-2}x^{i-2}$$

令 $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ ，則(3)式可以化成

$$G(x) - a_0 - a_1 x = 2x(G(x) - a_0) + 3x^2 \cdot G(x)$$ ，

$$G(x) = \frac{+a_0 + a_1 x - 2xa_0}{1 - 2x - 3x^2}$$ 。

代入 a_0, a_1 及利用部份分式可求得

$$G(x) = \frac{\frac{1}{4}}{1-3x} + \frac{-\frac{1}{4}}{1+x}$$ 。

因此 $G(x) = \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^i - \frac{1}{4}\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i$ ，

$$a_n = \frac{1}{4}3^n - \frac{1}{4}(-1)^n$$ 。

例 2. $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2},$, $a_0 = 1,\quad a_1 = 2, n \ge 2$ 。

利用和例 1 相同的方法可以求得

$$G(x) = \frac{C_1}{1+3x} + \frac{C_2}{(1-3x)^2}$$

$$= C_1 \sum_{i=0}^{\infty} 3^i x^i + C_2 \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i+1}{i} 3^i x^i \text{ 。}$$

因此

$$a_n = C_1 3^n + C_2 (n+1) 3^n$$

$$= (C_1 + C_2) 3^n + C_2 n \cdot 3^n a$$

利用 $a_0 = 1, a_1 = 2$，可求出 $C_1 = \frac{4}{3}, C_2 = -\frac{1}{3}$，因此解為

$$a_n = 3^n - \frac{1}{3} \cdot n \cdot 3^n = 3^n - n \cdot 3^{n-1} \text{ 。}$$

由上兩個例子，我們可以發現，求出適當方程式之解就可以得到兩個例子的答案。

定義 5.1：

一個遞迴關係若其形式為 $a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_p a_{n-p}$, $n \ge p$ 且 $c_1, c_2, \cdots, c_p \ne 0$ 為常數，則此遞迴關係為常係數線性齊次遞迴關係。

為了求遞迴關係 $a_n = \sum_{i=1}^{p} c_i a_{n-i}, n \ge p, c_p \ne 0$ 時 a_n 的唯一解，我們需要 $a_0, a_1, \cdots, a_{p-1}$ 等 p 個值，這些值又稱為**起始值**（initial values）也稱為是此遞迴關係的起始條件。由上面兩個例子，我們發現 a_n 可以寫成 $\alpha_1^n, \alpha_2^n, \cdots, \alpha_p^n$ 的線性組合或是 $\alpha_1^n, n\alpha_1^n, \cdots, n^t \alpha_1^n, \alpha_2^n, n\alpha_2^n, \cdots$ 的線性組合，這決定於方程式

$$\alpha^p - c_1 \alpha^{p-1} - c_2 \alpha^{p-2} - \cdots - c_p = 0 \tag{4}$$

是否有重根。方程式(4)稱為**特徵方程式**(Characteristic equation)(這方程式是由假設 $a_n = \alpha^n$ 得來。)它的根稱為**特徵根**(Characteristic roots)。

定理 5.1：

令 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,a_p$ 為常係數線性齊次遞迴關係 $a_n=\sum_{i=1}^{p}c_i a_{n-1},\quad n\ge p$，的 p 個特徵根，則 $a_n=\lambda_1 a_1^n+\lambda_2 a_2^n+\cdots+\lambda_p a_p^n$ 為此遞迴關係的解，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 為常數。同時，如果此 p 個根皆不相等，則遞迴關係的解必為上述形式，而且解也可以由 $a_0,a_1,\cdots,a_{p-1}$ 的值來唯一決定。

證明：

前半部份的證明可以直接代入驗算即可得證，在此省略。我們看後半部份。由於 $a_n=\lambda_1\alpha_1^n+\lambda_2\alpha_2^n+\cdots+\lambda_p\alpha_p^n$ 為一解，所以

$$\begin{cases}\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_p=a_0\\ \lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_p\alpha_p=a_1\\ \qquad\vdots\\ \lambda_1\alpha_1^{p-1}+\lambda_2\alpha_2^{p-2}+\cdots+\lambda_p\alpha_p^{1-p}=a_{p-1}\end{cases}\tag{5}$$

聯立方程組(5)可以用矩陣的形式表示成 $A\vec{x}=\vec{b}$，

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_p\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_p^2\\ \vdots & & & \\ \alpha_1^{p-1} & \alpha_2^{p-1} & \cdots & \alpha_p^{p-1}\end{bmatrix},\ \vec{x}=\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\\ \lambda_4\\ \lambda_5\end{bmatrix},\ \vec{b}=\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_{p-1}\end{bmatrix}.$$

由線性代數的基本性質，我們知道如果 $\det A$（行列式)不等於 0，則 $\vec{x}$ 有唯一解，於是第二部份得證。而 $\det A$ 為有名的 Vandermonde 行列式，它的值等於 $\prod_{1\le i\le j\le p}(\alpha_j-\alpha_i)$。因此，在 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_p$ 皆不相等的情況下 $\det A$ 不等於 0。

現在討論有重根的情況：假設特徵方程式(4)有 q 個不同根，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_q$ 且 α_i 有 μ_i 重根，$\mu_i\ge 1, i=1,2,\cdots,q$。我們稱下列值為(4)的基本解（basic solutions)：

$\alpha_1^n,n\alpha_1^n,\cdots,n^{\mu_1-1}\alpha_1^n,\alpha_2^n,n\alpha_2^n,\cdots,n^{\mu_2-1}\alpha_2^n,\cdots,\alpha_q^n,n\alpha_q^n,\cdots,n^{\mu_q-1}\alpha_q^n$. 為了便於表示，我們用 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p$ 來表示，於是得到以下的定理。

定理 5.2：

如果遞迴關係 $a_n=\sum_{i=1}^{p}c_i a_{n-i}, n\geq p$，具有基本根 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_p$，則一般解的形式為 $a_n=\lambda_1\beta_1+\lambda_2\beta_2+\cdots+\lambda_p\beta_p$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p$ 為常數。

現在我們回頭來解問題1，首先，由下表可以看出遞迴關係式 (1) 是正確的。

因此，$F_k=F_{k-1}+F_{k-2},\ F_0=F_1=1$，

利用特徵方程式 $\alpha^2-\alpha-1=0$，求得 $\alpha=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$。

由定理5.1，求得遞迴關係的唯一解

$$F_k=\frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})\cdot(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k+\frac{(-1)}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})\cdot(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k$$ 。