

國立高雄大學九十二學年度研究所碩士班招生考試試題

系(所)別: 統計學研究所

科目: 數理統計

每題20分, 該有的步驟皆須附上。

1. 設 X, Y, Z 為三獨立的隨機變數, 且皆有 $N(0, 1)$ 分佈。又令 $U = \min\{X, Y\}$ 。
 - (i) 試證 U^2 與 X^2 之分佈相同。
 - (ii) 試求 $E(U^2), \text{Var}(U^2)$ 。
 - (iii) 試利用(i)決定 Z/U 之分佈, 指出此為那一常見的分佈。
 - (iv) 試利用(i) 決定 Z^2/U^2 之分佈, 指出此為那一常見的分佈。
2. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $N(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本。試分別對下列二情況, 求 μ^2 之最小變異估計量(UMVUE): (i) σ^2 已知, (ii) σ^2 未知。
3. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由beta 分佈 $Be(\theta, 1), \theta > 0$, 所產生之隨機樣本。令 $T = -\sum_{i=1}^n \log X_i/n$ 。
 - (i) 試求 $E(T), \text{Var}(T)$ 。
 - (ii) 試求 $1/\theta$ 之一UMVUE。並問此UMVUE是否達到CRLB (Cramér-Rao Lower Bound)。
4. 設 X 有二項分佈 $B(5, \theta)$ 。欲檢定 $H_0 : \theta = 1/2, v.s. H_1 : \theta = 3/4$ 。令 α 表型I 錯誤(Type I error) 之機率。試利用統計量 X , 分別對(i) $\alpha = 1/32$, (ii) $\alpha = 6/32$, 給出最強力(most powerful)檢定。
5. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由均勻分佈 $U[0, \theta], \theta > 5$, 所產生之隨機樣本。令 U_n 表 X_1, \dots, X_n 中 小於5之個數。試證 $T_n = 5n/U_n$ 為 θ 之一致估計量(consistent estimator)。