國立高雄大學九十二學年度研究所碩士班招生考試試題

系(所)別: 統計學研究所 **科目: 機率論**

1-5題每題16分，第6 題20 分

1. 令X 與Y爲i.i.d且有均勻分佈$U(0,1)$。
   (i) 令$R=\sqrt{X^2+Y^2}$。試求R之機率密度函數(p.d.f.)及累積機率分佈函數(c.d.f.)。
   (ii) 令$U=min(X,Y), V=max(X,Y)$, 試求$Z=V-U$之分佈，及E(Z)與Var(Z)。

2. 設X,Y 之聯合p.d.f. 爲$f(x,y)=Cx^{\alpha-1}y^{\beta-1}(1-x-y)^{\gamma-1}, x,y>0$, 且$x+y\le 1$, 其中$C$爲一常數。
   (i) 試証$C=\Gamma(\alpha+\beta+\gamma)/(\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma))$
   (ii) 試証X,Y之二邊際分佈皆爲beta分佈。
   (iii) 試問X 與Y 是否獨立?
   (vi) 令$W=X/(1-X), Z=Y/(1-Y)$, 求W,Z 之聯合p.d.f.

3. 設X 有$\mathcal{P}(\lambda)$ 分佈, 且給定$X=k, Y$ 有$\mathcal{B}(k,p)$分佈. 試証Y與$X-Y$獨立, 並求給定$Y=y, X$之條件分佈.

4. 設X 有$\mathcal{E}(1)$ 的分佈, 又設給定$X=x>0$, $Y_1,\cdots,Y_n$ 爲條件獨立,且皆有$\mathcal{E}(x)$分佈. 即$h(y|x)=xe^{-xy}, y>0$.
   (i) 試求$\mathbf{Y}=(Y_1,\cdots,Y_n)$之p.d.f.
   (ii) 令$z=y_1+\cdots+y_n$, 試求給定$\mathbf{Y}=\mathbf{y}=(y_1,\cdots,y_n)$, X之條件p.d.f.，說明其分佈爲何？並求$E(X|\mathbf{Y}=\mathbf{y})$, 及$Var(X|\mathbf{Y}=\mathbf{y})$.

5. 設X_n有$\Gamma(n,\beta)$分佈, 以F_n 表$(X_n/\beta-n)/\sqrt{n}$之d.f.
   (i) 試求X_n之特徵函數。
   (ii) 利用(i)之結果，求F_n之特徵函數。
   (iii) 問$n\to\infty$時, F_n會弱收斂至何d.f. F? 並說明理由。

6. 設$X_1,\cdots,X_n$ 爲一組隨機樣本，且以$\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$ 爲其共同分佈。
   (i) 試證$\overline{X}_n=\sum_{k=1}^n X_k/n$ 與$S_n^2=\sum_{i=1}^n(X_i-\overline{X}_n)^2/(n-1)$ 獨立，並分別求出其分佈函數爲何。
   (ii) 試給出統計量$\sqrt{n}(\overline{X}_n-\mu)/S_n$之分佈，並說明之。