

國立高雄大學九十三年學年度研究所碩士班招生考試試題

系所組別：統計學研究所

科目：數理統計

每題20分，該有的步驟須附上。

1. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $U(0, \theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$ 。令 $X_{(1)} = \min X_i$, $X_{(n)} = \max X_i$ 。
 - (i) 試證 $X_{(1)}/X_{(n)}$ 與 $X_{(n)}$ 獨立。(5分)
 - (ii) 指出 $X_{(1)}/X_{(n)}$ 為那一常見分佈, 並給出參數。(5分)
 - (iii) 指出 $X_{(n)}/\theta$ 為那一常見分佈, 並給出參數。(5分)
 - (iv) 試求 $X_{(1)}/X_{(n)}$ 與 $X_{(n)}^2$ 之相關係數。(5分)
2. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由 $N(\theta, a\theta^2)$ 分佈所產生之隨機樣本, 其中 $a > 0$ 為一常數, $\theta > 0$ 為未知參數。令 $\bar{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$, $S_n^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_n)^2/(n-1)$ 。
 - (i) 試求 $E(S_n^2)$ 。(5分)
 - (ii) 試證 $T = (\bar{X}_n, S_n^2)$ 為 θ 之一充分統計量, 但並非完備統計量。(15分)
3. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由在區域 S 上均勻分佈所產生之隨機樣本, 其中 $S = [-2, -1] \cup [0, \theta]$, $\theta \geq 0$ 。
 - (i) 試求 θ 之最大概似估計量(Maximum Likelihood Estimator, MLE)。(10分)
 - (ii) 若只觀測到負的 X_i 's 之個數 U (而不知 X_1, \dots, X_n 之值), 試求此時 θ 之 MLE。(10分)
4. 設 X_1, \dots, X_4 為一組由 $U(0, \theta)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\theta > 0$ 。欲檢定 $H_0 : \theta = 1$, v.s. $H_a : \theta \neq 1$ 。令 $X_{(4)} = \max\{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ 。取拒絕域為 $\{X_{(4)} < 1/2, \text{ 或 } X_{(4)} > 1\}$ 。
 - (i) 試求檢力函數(power function) $K(\theta)$, $\theta > 0$ 。(16分)
 - (ii) 給出 $K(1/2)$ 及 $K(1)$ 。(4分)
5. 設 X_1, \dots, X_4 為一組由 $\mathcal{E}(\lambda)$ 分佈所產生之隨機樣本, $\lambda > 0$ 。令 $q(\lambda) = 1 - e^{-\lambda a}$, 其中 $a > 0$ 為一定值。
 - (i) 試求 $q(\lambda)$ 之 MLE。(5分)
 - (ii) 試求 $q(\lambda)$ 之一致最小變異不偏估計量(Uniformly Minimum Variance Unbiased Estimator, UMVUE)。(15分)