國立高雄大學九十五學年度研究所碩士班招生考試試題

科目: 機率論

考試時間：100分鐘　　　　本科原始成績：滿分100分

第1題10分, 第2-6題各18分, 須附上適當的步驟。

1. 設X與Z為二獨立的隨機變數, X在區間$(0,1)$均勻分佈, Z在區間$(0,0.1)$均勻分佈。令$Y=X+Z$。

   (i) 試求(X,Y)之聯合機率密度函數$f(x,y)$,

   (ii) 試求共變異數$Cov(X,Y)$。

2. 設$P(X=i)=p_i,\ p_i\geq 0,\ i=0,1,2,\ p_0+p_1+p_2=1$。設$X_1,X_2,\cdots$為獨立且皆與$X$有相同分佈。令$S_n=\sum_{i=1}^n X_i,\ n\geq 1,\ Q_t=\min\{n|n\geq 1, S_n\geq t\}, t\geq 0$。

   (i) 當$p_0=p_1=p_2$, 試求$P(Q_4=4)$,

   (ii) 試求$P(Q_1=i),\ i\geq 1$,

   (iii) 當$p_2=0,\ t,k$為正整數, $k\geq t$, 試求$P(Q_t=k)$, 並指出此為那一常見分佈, 參數為何?

3. 設(X,Y)之聯合機率密度函數為

$$f(x,y)=\sum_{i=1}^{k} c_i \frac{x^{p-1}e^{-x/r_i}}{\Gamma(p)r_i^p}\frac{y^{q-1}e^{-y/r_i}}{\Gamma(q)r_i^q},\ x,y>0,$$

   其中$k\geq 1,\ p,q>0,\ r_1,\cdots,r_k>0,\ c_1,\cdots,c_k>0$, 且$\sum_{i=1}^k c_i=1$。
   令$U=X+Y, W=X/(X+Y)$。

   (i) 試求U,W之聯合機率密度函數$g(u,w)$, 並給出u,w之範圍,

   (ii) 試指出W之邊際分佈為那一常見分佈, 參數為何?

   (iii) U與W是否獨立, 原因為何?

4. 設隨機變數Z之機率密度函數為

$$f(z)=2\phi(z)\Phi(\lambda z),\ z\in R,$$

   其中$\lambda\in R$為一常數, $\phi(z),\Phi(z)$分別為$\mathcal{N}(0,1)$分佈之機率密度函數及分佈函數。

   (i) 若$\lambda\neq 0$, 則$f(z)$是否為偶函數?

   (ii) 試求$Y=Z^2$之分佈, 並指出此為那一常見分佈, 參數為何?

   (iii) 試證上述$f(z), z\in R$, 確為一機率密度函數。

5. 設X_1, X_2, X_3相互獨立，且皆有在$[0, a]$上之均勻分佈，其中$a > 0$為一常數。令$X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq X_{(3)}$表其順序統計量。令$0 \leq t \leq a$。

(i) 試求給定$X_{(3)} = t$，$X_{(2)}$之條件分佈，

(ii) 試求$E\left(X_{(2)}^2 + X_{(3)} | X_{(3)} = t\right)$，

(iii) 試求$E\left(e^{-sX_{(2)}} | X_{(3)} = t\right)$，$s \geq 0$。

6. 設$P(X_n = 0) = \frac{1}{n}$，$P(X_n = 1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$，$P(X_n = 2) = \frac{1}{2} - \frac{2}{n}$，$n \geq 5$。令$F_n(x) = P(X_n \leq x)$，$x \in R$。

(i) 試給出$F_n(x), x \in R$，

(ii) 試給出一分佈函數$F(x)$，$x \in R$，使得對每一F之連續點x，$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$。

(iii) 試給一隨機變數X，使得其分佈函數為(ii)中之F。