國立高雄大學九十六學年度博士班招生考試試題

科目：機率論　　　　　　系所：統計學研究所　　　　是否使用計算機：是
考試時間：100 分鐘　　　本科原始成績：100 分

1-5題每題20分，須附上該有之步驟。

1. 設隨機變數X_λ之機率密度函數(p.d.f.) 為

$$f(x) = 2\phi(x)\Phi(\lambda x),\ x \in R,$$

其中ϕ為$\mathcal{N}(0,1)$分佈之p.d.f., $\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x}\phi(u)du$, $\lambda \in R$為一常數。

(i) 試證$f(x)$確實為一p.d.f.,

(ii) 求$Y = X_\lambda^2$之p.d.f., 並決定此為那一常見分佈,

(iii) 求$\lambda \to \infty$時, X_λ之極限分佈,

(iv) 令$\Phi(x;\lambda) = P(X_\lambda \le x)$, $x \in R$。試證$\Phi(x;1) = (\Phi(x))^2$, $x \in R$。

2. 設$X_1, X_2, \cdots, X_n$, $n \ge 1$, 為i.i.d. $\mathcal{U}(0,1)$ 分佈之隨機變數, $X_{(1)} \le X_{(2)} \le \cdots \le X_{(n)}$表其順序統計量。對$1 < k < n$, 試求

(i) 給定$X_{(k)} = a$, $0 < a < 1$, $X_{(1)}, \cdots, X_{(k-1)}$之條件分佈,

(ii) 給定$X_{(k)} = a$, $0 < a < 1$, $E(X_{(j)} - X_{(i)})$, 假設$k \le i < j \le n$。

3. 設隨機變數X滿足$E(X^2) < \infty$。令$[x]$表小於或等於x之最大整數。則證明或否證：

(i) $E([X]) \le E(X)$是否必成立?

(ii) $\mathrm{Var}([X]) \le \mathrm{Var}(X)$是否必成立?

4. 設將r個球隨機地放進n個盒子中。令A_i表第i個盒子為空盒之事件, N_n表總共之空盒數。試證

(i) $P(A_i) = (1-1/n)^r, E(N_n) = n(1-1/n)^r, \mathrm{Var}(N_n) = n(n-1)((1-2/n)^r - (1-1/n)^{2r}) + n((1-1/n)^r - (1-1/n)^{2r})$;

(ii) 若r與n有關, 且$n \to \infty$時, $r/n \to c$, 則$n \to \infty$時, $E(N_n/n) \to e^{-c}$, 且N_n/n機率收斂(converges in probability) 至e^{-c}。

5. 設隨機數列$\{X_n, n \ge 1\}$機率收斂至隨機變數X。試證存在子一數列$\{n_k, k \ge 1\}$, 使得$k \to \infty$時, $\{X_{n_k}, k \ge 1\}$幾乎確實地收斂(converges almost surely)至X。