國立高雄大學統計學研究所

九十八學年度第一學期博士班資格考試

考試日期及時間：98年9月16日13:00–17:00　　　科目：機率論

第1題10分，第2-7題各15分。

1. 設X, Y為二獨立的$\mathcal{E}(\lambda)$分佈r.v.'s。試求$\min\{X, Y\}$, $|X - Y|$之聯合p.d.f.。

2. 設$X_1, \cdots, X_{1,000}$為i.i.d.$\mathcal{B}er(1/2)$分佈之r.v.'s。令$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \geq 1$。試求$E((S_{1,000} - S_{300})I_{\{S_{700}=400\}})$。

3. 設每日到某醫院看病的人數N有$\mathcal{P}(\lambda)$分佈。而到醫院的病人, 相互獨立地, 每人皆有p_i的機率到部門i, $i = 1, \cdots, k$, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$。每日到部門i的病人數以M_i表之。試求$M_1, \cdots, M_k$之聯合分佈, 並指出M_i有何分佈。

4. 設$\{X_i, i \geq 1\}$為i.i.d.之r.v.'s, 且$E(X_1) = \mu$, $\mathrm{Var}(X_1) = \sigma^2$存在。令$\overline{X}_n = \sum_{i=1}^n X_i/n$。試證若$\max\limits_{1\leq i\leq n} a_i^2/\sum_{i=1}^n a_i^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, 則
$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i(X_i - \mu)}{(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X}_n)^2/(n-1))^{1/2}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0, 1)\text{。}$$

5. 設$\{X_n, n \geq 1\}$為一數列有限的r.v.'s。試證存在常數數列$\{a_n, n \geq 1\}$, 使得$X_n/a_n \xrightarrow[n\to\infty]{a.s.} 0$。

6. 獨立地投擲一公正的骰子, 令X_n表至第n次之點數和, $n \geq 1$。試求$\lim_{n\to\infty} P(X_n$為13之倍數)。

7. 設$\{\mathcal{N}(t), t \geq 0\}$為一更新過程, 到達間距之共同d.f.$F$為連續, $F(0) = 0$。試證$\{\mathcal{N}(t), t \geq 0\}$為一 Markov 過程, 若且唯若其為 Poisson 過程。