第四章　生成函數

(Generating functions)

在組合數學中我們常常會遇到計算一種量，它會隨著 k 的改變而有所不同；這種量我們可以把它想成是 k 的函數，以 $f(k)$ 表示，或簡單以 a_k 表示。一串數列 a_k 和它的生成函數一一對應。

4.1　定義與範圍：計算技巧

問題 1.

目前台幣的發行一共有一元、五元、十元、五十元四種銅板，現在若把一張百元鈔票換成全部是銅板，一共有多少種不同的方法？

（註）如果我們把問題想成：用銅板來湊成 k 元的方法數為 a_k，則我們是在求 a_k，下列為一些簡單的數據。

$a_0=1$，$a_1=1$，$a_2=1$，$a_3=1$，$a_4=1$，$a_5=2$，$a_6=2\cdots$

$\underline{0}\quad \underline{1}\quad \underline{1\ \ 1}\quad \underline{1\ \ 1\ \ 1}\quad \underline{1\ \ 1\ \ 1\ \ 1}\quad \cdots$

$\underline{0}\quad \underline{5}\quad \underline{5\ \ 5}\quad \underline{5\ \ 5\ \ 5}\quad \underline{5\ \ 5\ \ 5\ \ 5}\quad \cdots$

$\underline{0}\quad \underline{10}\quad \underline{10\ \ 10}\quad \underline{10\ \ 10\ \ 10}\quad \underline{10\ \ 10\ \ 10\ \ 10}\quad \cdots$

$\underline{0}\quad \underline{50}\quad \underline{50\ \ 50}\quad \underline{50\ \ 50\ \ 50}\quad \underline{50\ \ 50\ \ 50\ \ 50}\quad \cdots$

圖 1

在上面圖 1 中，我們將在每一列各選一堆（劃底線），若以一個 χ 代表一元，則可以轉成下式：

$$(1+x+x^2+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x^{10}+x^{20}+\cdots)(1+x^{50}+x^{100}+\cdots) \quad (1)$$

如果把（1）式化成 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 的形式，則 a_k 為所求。

在這裡 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 為**一冪級數**（Power series）。不過為了便於生成函數的研究，下面假設是必要的。

（假設）$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 在 x 點收斂。

定義 4.1：

令數列（a_k）為實數數列，函數 $G(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$，稱為該序列的**生成函數**(generating function)。

我們不難發現（1）式可以寫成 $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^{10}}\cdot\frac{1}{1-x^{50}}$

為了求問題 1 的解，我們假設

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)}=\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})}=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^x$$
$$\frac{1}{(1-x)(1-x^5)(1-x^{10})(1-x^{50})}=\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$$

$$A_n=B_n=C_n=D_n\ ,\ \forall n<0$$

由於

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n=\left(1-x^5\right)\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n-\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{n+5}$$

因此

$$A_n=B_n-B_{n-5} \tag{2}$$

換言之

$$B_n=A_n-B_{n-5} \tag{3}$$
$$C_n=B_n-C_{n-5} \tag{4}$$
$$D_n=C_n-D_{n-50} \tag{5}$$

由（3），（4），（5）及 $A_n=1$， $\forall n\geq 0$， $B_0=C_0=D_0=1$，我們可以求得 D_{100} 即為問題 1 的答案。

問題 2.

令 H_r^n 為在 n 種物品中，可重複選擇（每樣物品）r 個物品的不同方法數，求 H_6^{10} 。

利用相似的概念我們可以求得 H_r^n 的生成函數為

$$\left(1+x+x^2\cdots\right)=\left(\frac{1}{1-x}\right)^n 。$$

因為 $\left(1+x\right)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k$ 中的 n 可以推廣至實數，因此

$$\left(1+x\right)^\alpha=\sum_{k}\binom{\alpha}{k}x^k，\alpha\in\mathbb{R}，|x|<1 \qquad (6)$$

於是利用（6），$\left(1+\left(-x\right)\right)^{-n}$ ，我們求得

$$\begin{aligned}H_r^n&=\binom{-n}{r}\left(-1\right)^r\\&=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-r+1)}{1\cdots r}\left(-1\right)^r\\&=\frac{(n+r-1)(n-r-2)\cdots(n+1)n}{r!}\\&=\binom{n+r-1}{r}\end{aligned}$$

所以 $H_6^{10}=\binom{15}{6}$

問題 3.

把一個正整數寫成正整數和的方法有多少種？

令 n 為給定的正整數，$p(n)$ 代表分割的方法數。現在考慮 $f(x)=(1+x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots(1+x^n+x^{2n}+\cdots)$，顯然 $p(n)$ 代表 $f(x)$ 中 x^n 中的係數；所以 $f(x)$ 自然成為 $p(n)$ 的生成函數。

$f(x)$ 也可以寫成 $\prod_{i=1}^{n}(1-x^i)^{-1}$ （7）

利用上述表示法對於解決 $p(n)$ 計算的問題顯然不具太大的意義，然而，當我們把 n 作比較特殊的分割時，（7）就可以幫上一些忙。例如，把 n 分割成全部都是相異正整數的方法數就會等於把 n 分割成全部是奇數的方法數：因為前者 $p_d(n)$ 的生成函數為

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\ \cdots\ (1+x^n)\ \cdots \tag{8}$$

而後者 $p_0(d)$ 的生成函數為 $\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdots\frac{1}{1-x^{2k+1}}\cdots$ （9）

由於（8）式與（9）式相等，所以 $p_d(n)=p_0(n)$

另外一個例子是分割成 m 部分的方法數與分割成 n 部分最大數是 m 的方法數相等。

問題 4.

證明

$$\frac{1}{1-x}=(1+x+x^2+\cdots+x^9)(1+x^{10}+x^{20}+\cdots+x^{90})(1+x^{100}+\cdots+x^{900})\cdots。$$

左式中任一個 x^k 的係數為 1，而右式中可以看出要求出 x^k 的係數需要看 k 這個數的十進位表示法，第一個括號代表個位數，然後十位數，百位數等等，顯然組合的方式只有一個，所以 x^k 的係數也是 1，這就證明了左右兩式恆等。

問題 5.

求數列$(1, 2, 3, \cdots)$的生成函數。

乍看之下我們沒有什麼好方法，只知道 $f(x)=1+2x+3x^2+\cdots$，然而當我們看 $\dfrac{1}{(1-x)^n}$ 時，就會知道$(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{k}x^k$，此時，當$n=2$時

$a_k=\binom{k+1}{k}=k+1$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x^2)}$。

（註） 廣義的生成函數

$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\mu_k(x)$為數列$(a_k)$的一般生成函數，這裡的$\mu_k(x)$又稱為標示函數（Indicator functions）。$\mu_k(x)$的選擇要符合下列條件：即當

$(a_k)\neq(b_k)$ 時，$\sum_{k=0}^{\infty}a_k\mu_k(x)\neq\sum_{k=0}^{\infty}b_k\mu_k(x)$。例如：我們可以令 $\mu_k(x)=\cos kx$。

但是最常用的是令 $\mu_k(x)=x^k$。

4.2 指數生成函數（Exponential Generating Functions）

定義 4.2：

$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{a_k}{k!}\mu_k(x)$為數列 (a_k)的指數生成函數，其中 $\mu_k(x)$為標示函數。

為了方便討論，我們令 $\mu_k(x)=x^k$，因此 (a_k) 的指數生成函數為

$$F(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}x^k$$

例： $a_k=1, k=0, 1, 2, \cdots$，(a_k) 的指數生成函數為 e^x。

例： 令 $P(n\,,\,k)$ 為一個 $n-$ 集中取出 k 個元素所做成的排列數，則

$$P(n\,,\,k)=C(n\,,\,k)\cdot k!=\binom{n}{k}\cdot k!$$

因為

$$(1+x)^n=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n}{k}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{\binom{n}{k}\cdot k!}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{p(n,k)}{k!}x^k$$

所以 $\left(P(n\,,\,k)\right)$ 的指數生成函數為 $(1+x)^n$，這和 $C(n,k)$ 的生成函數相同，再一次說明了 $P(n,k)$ 和 $C(n,k)$ 之間只差了 $k!$。

問題 6.

用 $a,\ b,\ c$ 來組成一個長度不大於 5 的字，在最多可用一個 b，一個 c 及三個 a 的情況下，問方法有多少種？

如果我們只看組合，則用下式可以看出不同的組合方式。

$$(1+ax+a^2x^2+a^3x^3)(1+bx)(1+cx)$$

但是我們要求的答案是排列，因此我們利用指數生成函數，即

$$\begin{aligned}&(1+\frac{a}{1!}x+\frac{a^2}{2!}x^2+\frac{a^3}{3!}x^3)(1+\frac{b}{1!}x)(1+\frac{c}{1!}x)\\&=1+(\frac{a}{1!}+\frac{b}{1!}+\frac{c}{1!})x+(\frac{bc}{1!1!}+\frac{a^2}{2!}x^2+\frac{ab}{1!1!}+\frac{ac}{1!1!})x^2\\&\quad+(\frac{a^3}{3!}+\frac{abc}{1!1!1!}+\frac{a^2b}{2!1!}+\frac{a^2c}{2!1!})x^3+(\frac{a^2bc}{2!1!1!}+\frac{a^3b}{3!1!}+\frac{a^3c}{3!1!})x^4+\frac{a^3bc}{3!1!1!}x^5\end{aligned}$$

現在我們可以求出不同的方法數，例如長度為 3 的方法有

$3!(\frac{1}{3!}+\frac{1}{1!1!1!}+\frac{1}{2!1!}+\frac{1}{2!1!})=1+6+3+3=13$ 種。（令 $a=b=c=1$）問題 6 也就可以求出答案。

問題 7.

$\left\{ {n \atop k} \right\}$的求法。

令$T(n,k)$為把n個元素分在k個有次序排定的非空集合之方法數，則$T(n,k)=\left\{ {n \atop k} \right\}\cdot k!$。為了求$\left\{ {n \atop k} \right\}$，我們先找出$T(n,k)$的指數生成函數。令$C(i)$代表元素 i 所被分到的集合，則 $T(n,k)$可以想成是用k種物品來形成的一個n個位置的排列$C(1)C(2)\ldots C(n)$，所以$T(n,k)$的生成函數

$$H(x)=(\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots)^k=(e^x-1)^k$$

利用二項式展開式

$$\begin{aligned}H(x)&=((-1)+e^x)^k\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(e^x)^{k-i}\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}(k-i)^n x^n\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\end{aligned}$$

所以

$$T(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\text{，}$$

即

$$\left\{ {n \atop k} \right\}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\text{。}$$